

应力状态的叠加问题

——联合构造应力场研究(I)

乐光禹

(成都地质学院地质学系)

【摘要】地壳内复杂受力的构造应力场,依据叠加原理,可以看作是若干简单受力的构造应力场的叠加。应力状态的叠加是分析构造应力场叠加的基础。该文推导出不同应力状态的叠加公式,并阐明叠加结果及有关参数在各种情况下的变化规律。

关键词 叠加原理, 应力状态, 构造应力场, 构造型式

构造型式是地壳岩石受构造应力场作用的结果,而构造应力场又由岩块、地块所受的构造力及有关的边界条件决定。岩块或地块所承受的构造力可以是简单的挤压、拉张或剪切(简单受力方式或基本受力方式),或两组以及两组以上的压、拉或剪的共同作用(复杂受力方式或联合受力方式)。由此产生各种不同的构造应力场及相应构造型式。联合构造的概念是李四光(1973)首先提出来的,他认为联合构造是两个或两个以上构造体系在同时同地出现所产生的一种综合结果^[1]。作者(1989)曾指出,联合构造实质上就是复杂受力或联合受力的构造型式,它是两组或两组以上构造力同时同地联合作用的结果^[2]。对于地壳岩石这类变形体来说,联合作用的诸外力一般不能合成为某个合力,它们只是通过沿一定的边界联合作用,共同决定岩块地块内的构造应力场和构造变形。

分析复杂受力的构造应力场可以用有限元法,也可以用叠加法。后一方法更为简便易行,所得结果与有限元法一致。根据弹性理论的叠加原理或力的独立作用原理^[3,4],同时作用于物体的两组或两组以上外力的总和在物体内部所产生的效应(应力、应变及位移)等于各组外力分别作用所产生的效应总和。因此,我们可以先按各简单受力计算应力状态和应力场,再把它们叠加起来,求得复杂受力的应力状态和应力场,即联合应力状态和联合构造应力场。

应力状态的叠加应服从张量叠加法则。一般说来,不论三维或二维应力状态的叠加都可以按哥西公式^[5],通过转化坐标轴来进行。若直接推导出叠加公式,应用起来将更为方便。关于应力状态的叠加及其应用,前人及作者等^[6-10]曾从不同角度提出过,但均较简略,且只限于主应力状态的叠加。本文主要研究利用莫尔应力圆,结合坐标转换,进行各种二维应力状

① 1990-05-02 收稿

② 国家自然科学基金资助项目

态的叠加，同时以图解和公式来阐明应力叠加关系，以作为进一步分析各种型式的联合叠加应力场的基础。这一方法对岩石力学、工程地质和地震地质等学科也都有重要的应用价值。

1 主应力状态和偏应力状态及其叠加

1.1 叠加公式及其地质意义

设地壳内一点 O 有两个应力状态同时作用。第一应力状态 (A) 的主应力为 σ_{1a} 和 σ_{2a} ，第二应力状态 (B) 的主应力为 σ_{1b} 和 σ_{2b} 。两个主应力状态既然同时作用于同一点，必然叠加为第三个应力状态，即联合应力状态 (C)，联合主应力为 σ_{1c} 和 σ_{2c} 。现以 A, B 两者的对应主应力为准进行叠加。令 $\sigma_{1b} \wedge \sigma_{1a} = \sigma_{2b} \wedge \sigma_{2a} = \alpha$ ， $\sigma_{1c} \wedge \sigma_{1a} = \sigma_{2c} \wedge \sigma_{2a} = \theta$ (符号 “ \wedge ” 代表夹角，下同)。 α 为应力叠加角， θ 为联合主应力角。若 σ_{1a} 、 σ_{2a} 和 σ_{1b} 、 σ_{2b} 以及 α 为已知，则联合主应力 σ_{1c} 、 σ_{2c} 及其对 σ_{1a} 、 σ_{2a} 的方位角 θ 可求，图 1 即表示它们的空间关系。

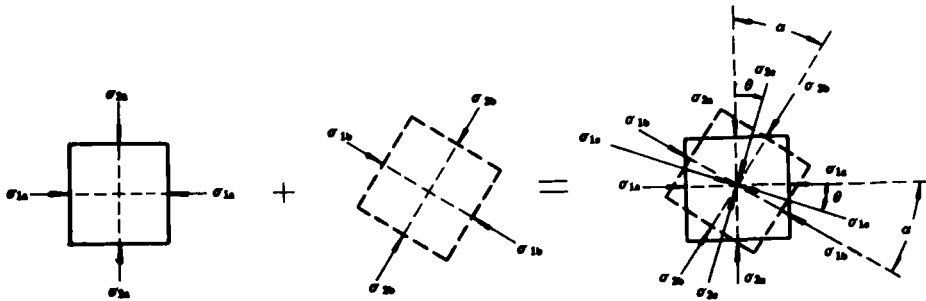


图 1 两个主应力状态的叠加关系

Fig. 1 Superposition of two principle stress-states

为了便于利用应力圆进行叠加，直接导出叠加公式，可先把 A, B 两个应力状态分解为平均应力状态或等应力状态 σ_m 和偏应力状态 d ，然后分别叠加 (图 2)。A 应力状态的平均应力 $\sigma_{ma} = (\sigma_{1a} + \sigma_{2a}) / 2$ ，偏应力 $d_a = \pm (\sigma_{1a} - \sigma_{2a}) / 2$ ^①；B 应力状态的平均应力 $\sigma_{mb} = (\sigma_{1b} + \sigma_{2b}) / 2$ ，偏应力 $d_b = \pm (\sigma_{1b} - \sigma_{2b}) / 2$ 。平均应力是各向等应力，可按标量相加，即联合平均应力

$$\sigma_{mc} = \sigma_{ma} + \sigma_{mb} = (\sigma_{1a} + \sigma_{2a} + \sigma_{1b} + \sigma_{2b}) / 2 \quad (1)$$

联合平均应力在 $\sigma_{(c)} - \tau_{(c)}$ 直角坐标系中是位于 $\sigma_{(c)}$ 轴上一个点，该点是联合应力态 (C) 应力圆的圆心。偏应力状态 A, B 和联合偏应力状态 C 的应力圆都是同心圆，圆心在坐标原点。

如图 3a，在 $\sigma_{(a)} - \tau_{(a)}$ 直角坐标系中，以原点 O 为中心，以 $\overline{OA} = d_a$ 为半径画圆，即为偏应力状态 (A) 应力圆。过同一原点，作另一直角坐标系 $\sigma_{(b)} - \tau_{(b)}$ ，令 $\sigma_{(b)}$ 轴 \wedge $\sigma_{(a)}$ 轴 = $\tau_{(b)}$ 轴 \wedge $\tau_{(a)}$ 轴 = 2α ，以 $\overline{OB} = d_b$ 为半径，作偏应力状态 (B) 应力圆。B 应力圆与 $\sigma_{(a)}$ 轴交于 D 点，以 D 点所代表的截面为叠加参照面， \overline{OA} 和 \overline{OD} 都代表该截面的同一法线。对偏应力状态 A 来说，该面是

① 本文取压应力为正，拉应力为负；剪应力以左旋为正，右旋为负；角度以逆时针量取为正，顺时针量取为负

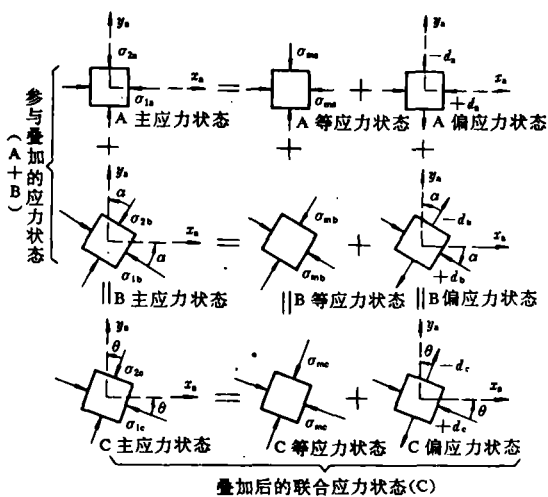


图2 主应力、平均应力和偏应力的叠加关系
Fig. 2 Superpositions of principle stresses with mean stresses and deviatoric stresses

主平面，其上有主（偏）应力 $d_a = \overline{OA}$ ，没有剪应力。对偏应力状态（B）来说，该面是一般斜截面，其上有正（偏）应力 $= \overline{OE}$ ，剪应力 $= \overline{DE}$ 。参照面上的全部正（偏）应力和剪应力分别为

$$d = \overline{OA} + \overline{OE} = d_a + d_b \cos 2\alpha$$

$$\tau = \overline{DE} = d_b \sin 2\alpha$$

作辅助矩形 $OGFH$ ，使 $\overline{OG} = \overline{OA} + \overline{OE} = d$ ， $\overline{FG} = \overline{DE} = \tau$ ，则 $\angle FOG = 2\theta$ ， θ 为联合主应力角（图 3b, c）。把矩形 $OGFH$ 移置到 $\sigma_{(a)} - \tau_{(a)}$ 坐标系中，使 \overline{OF} 与 $\sigma_{(a)}$ 轴重合，延长 \overline{OG} 即得联合应力状态（C）应力圆的横坐标轴 $\sigma_{(c)}$ ，相应地也就得到纵坐标轴 $\tau_{(c)}$ 。以 O 为中心， \overline{OF} 为半径作圆，即得联合偏应力状态（C）的应力圆。联合偏应力 $+d_c = \overline{OC}$ ， $-d_c = \overline{OC}'$ ，并可由图 3 直接得出：

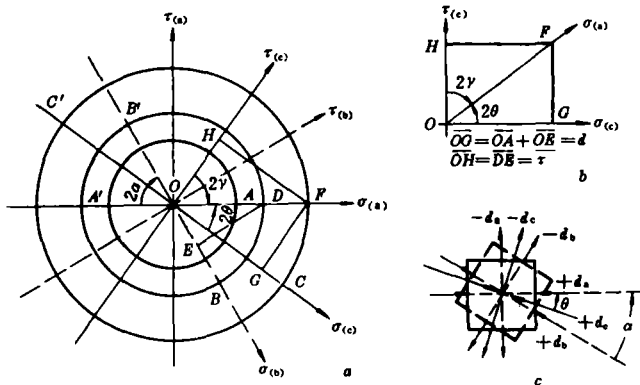


图3 偏应力状态的叠加应力圆

Fig. 3 Superposition for Mohr's stress circles of deviatoric stress states

$$\begin{aligned} d_c &= \pm \sqrt{d^2 + \tau^2} \\ &= \pm \sqrt{(d_a + d_b \cos 2\alpha)^2 + (d_b \sin 2\alpha)^2} \\ &= \pm \left[\sqrt{(\sigma_{1a} - \sigma_{2a})^2 + (\sigma_{1b} - \sigma_{2b})^2 + 2(\sigma_{1a} - \sigma_{2a})(\sigma_{1b} - \sigma_{2b}) \cos 2\alpha} \right] / 2 \end{aligned} \quad (2)$$

联合主应力为 σ_{1c} ， σ_{2c}

$$\begin{aligned} \sigma_{1c} &= \sigma_{mc} + d_c = (\sigma_{1a} + \sigma_{2a} + \sigma_{1b} + \sigma_{2b}) / 2 \\ \sigma_{2c} &= \pm \left[\sqrt{(\sigma_{1a} - \sigma_{2a})^2 + (\sigma_{1b} - \sigma_{2b})^2 + 2(\sigma_{1a} - \sigma_{2a})(\sigma_{1b} - \sigma_{2b}) \cos 2\alpha} \right] / 2 \end{aligned} \quad (3)$$

联合主应力角 $\theta = \sigma_{1c} \wedge \sigma_{1a} = d_c \wedge d_a$ ，从图 3 可得

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta &= \frac{d_c \sin 2\alpha}{d_a + d_b \cos 2\alpha} = \frac{(\sigma_{1b} - \sigma_{2b}) \sin 2\alpha}{(\sigma_{1a} - \sigma_{2a}) + (\sigma_{1b} - \sigma_{2b}) \cos 2\alpha} \\ &= \frac{\sin 2\alpha}{K + \cos 2\alpha} \end{aligned} \quad (4)$$

$K = d_a/d_b = (\sigma_{1a} - \sigma_{2a})/(\sigma_{1b} - \sigma_{2b})$, 为叠加偏应力比或叠加应力差比, 简称 K 值。

把联合偏应力圆(图 3)的圆心沿 $\sigma_{(c)}$ 轴移至 C , 令 $\overline{OC} = \sigma_{mc}$, 即得联合主应力状态 C 应力圆(图 4)。

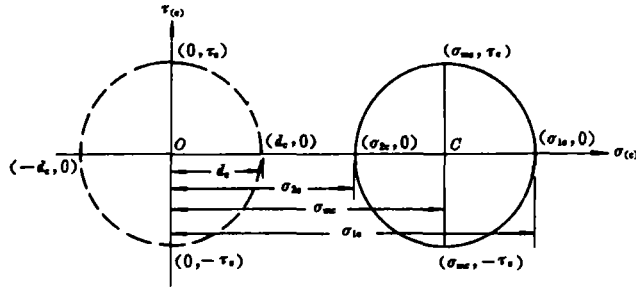


图 4 联合偏应力状态和联合主应力状态的莫尔圆

Fig. 4 Mohr's circles of combined deviatoric stress state and combined principle stress state

联合应力状态的最大剪应力及其方位同样可由图 3 直接得出

$$\pm \tau_c = \pm d_c = \pm \sqrt{(\sigma_{1a} - \sigma_{2a})^2 + (\sigma_{1b} - \sigma_{2b})^2 + 2(\sigma_{1a} - \sigma_{2a})(\sigma_{1b} - \sigma_{2b}) \cos 2\alpha} \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} 2\gamma = - (K + \cos 2\alpha) / \sin 2\alpha \quad [K = (\sigma_{1a} - \sigma_{2a}) / (\sigma_{1b} - \sigma_{2b})] \quad (6)$$

τ_c 剪切面法线与 σ_{1c} 作用线的夹角 γ 称为联合剪应力角, 其符号与联合主应力角 θ 相反。

联合平均应力决定体积变形, 其值与应力叠加角 α 无关。联合主干构造的性质取决于联合平均应力的符号: 平均应力为正值, 主干构造为压性; 平均应力为负值, 主干构造为张性。联合偏应力值随叠加角 α 变化。由 (2) 式, $\alpha = 0^\circ$ 时, $d_c = \pm (d_a + d_b)$, 绝对值最大; $\alpha = 90^\circ$ 时, $d_c = \pm (d_a - d_b)$, 绝对值最小; $90^\circ > \alpha > 0^\circ$ 时, d_c 值在上两者间变化。偏应力的叠加并不总是导致其绝对值的加大, 与 d_a 、 d_b 中较大一方比较, d_c 的变化也与 α 角有关。设 $d_a \geq d_b$, 存在临界角 α_0 , 当 $\alpha < \alpha_0$ 时, $d_c > d_a$; 当 $\alpha > \alpha_0$ 时, $d_c < d_a$; 当 $\alpha = \alpha_0$ 时, $d_c = d_a$ 。临界角 α_0 与 K 值有关。在 (2) 式中, 以 α_0 代 α , 以 d_a 代 d_c , 可求得

$$\cos 2\alpha_0 = -d_b / 2d_a = -1/2K \quad (7)$$

令 $\infty \geq K \geq 1$, 则 $45^\circ \leq \alpha_0 \leq 60^\circ$ 。偏应力主要决定形态变形, 只有当 $\alpha < \alpha_0$ 时, 叠加后的联合偏应力绝对值才会加大, 变形加强, 反之则会削弱。联合构造变形的总强度取决于联合平均应力与联合偏应力的总和, 联合构造形态变形的强度和构造定向程度由联合偏应力与联合平均应力的比值 (d_c/σ_{mc}) 决定; 比值越大, 形态变形强度和构造定向程度越高, 反之亦然。

1.2 叠加曲线及其讨论

1.2.1 不同 K 值时的 α - θ 曲线

由 (4) 式, 联合主应力角 θ 是应力叠加角 α 和应力差比 K 的函数, 可用图 5 的曲线族表

示。现简单讨论如下：

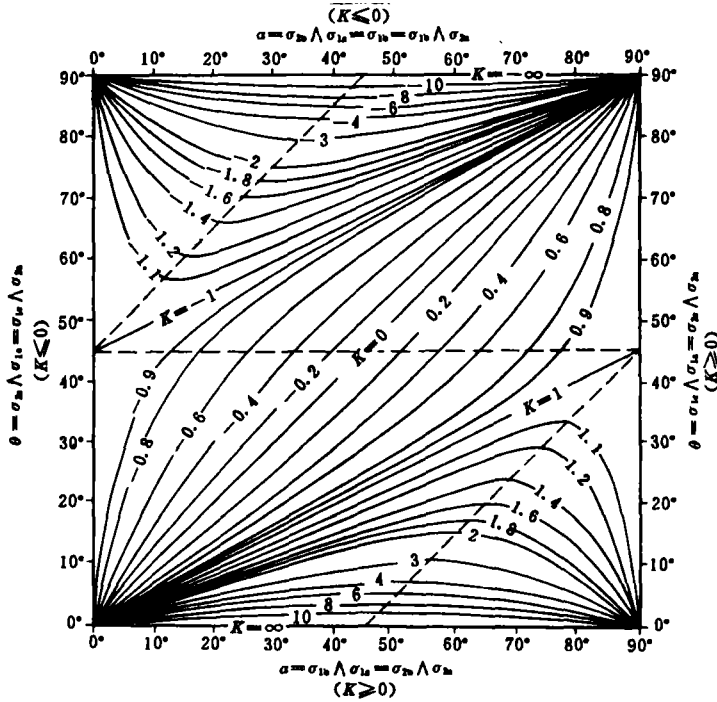


图 5 各种 K 值的 θ - α 关系曲线

Fig. 5 θ - α curves at different K values

a. 当 $K=0$ 时, $\sigma_{1a}-\sigma_{2a}=0$, $\theta=\alpha$, 表示一个等应力状态 ($\sigma_{1a}=\sigma_{2a}$) 与一个定向应力状态 ($\sigma_{1b}>\sigma_{2b}$) 叠加, 联合主应力方向与定向主应力方向相同。

b. 当 $K=1$ 时, $\sigma_{1a}-\sigma_{2a}=\sigma_{1b}-\sigma_{2b}$, $\theta=\alpha/2$, 表示联合主应力位于参与叠加的相应主应力的夹角平分线上。当 $K=1$ 时, 若 $\alpha=90^\circ$, 则联合偏应力 $d_c=0$, 只存在联合平均应力 σ_{mc} 。

c. 当 $1>K>0$ 时, $\sigma_{1a}-\sigma_{2a}<\sigma_{1b}-\sigma_{2b}$, $\alpha/2\leq\theta\leq\alpha$, 联合主应力 σ_{1c} , σ_{2c} 分别靠近 σ_{1b} , σ_{2b} 一边。当 $\alpha=0^\circ$ 时, $\theta=0^\circ$; 随 α 的加大, θ 相应加大; 当 $\alpha=90^\circ$ 时, $\theta=90^\circ$ 。

d. 当 $\infty>K>1$ 时, $\sigma_{1a}-\sigma_{2a}>\sigma_{1b}-\sigma_{2b}$, $0^\circ\leq\theta<\alpha/2$, 联合主应力 σ_{1c} , σ_{2c} 靠近 σ_{1a} , σ_{2a} 一边。当 $\alpha=0^\circ$ 时, $\theta=0^\circ$, 随 α 角增大, θ 角相应增大; 当 α 增至临界值 α_0 时, θ 达到最大值 θ_m ; 然后, 随 α 的继续增大, θ 反而减少; 当 $\alpha=90^\circ$ 时, $\theta=0^\circ$ 。对任一 K 值都有相应的 α_0 和 θ_m , 由图 5 右下角的虚线代表, 并有以下关系:

$$\theta_m = \alpha_0 - 45^\circ \quad (8)$$

在 (4) 式中, 以 θ_m 代 θ , α_0 代 α , 并把 (8) 式代入 (4) 式, 得

$$\cos 2\alpha_0 = -1/K \quad (9)$$

给定任何大于 1 的 K 的值, 即可由 (9) 式和 (8) 式求得相应的 α_0 和 θ_m 。

e. 当 $K=\infty$ 时, $\sigma_{1b}-\sigma_{2b}=0$, 无论 α 为何值, 恒有 $\theta=0^\circ$, 表示等应力状态 ($\sigma_{1b}=\sigma_{2b}$) 与定向应力状态 ($\sigma_{1a}>\sigma_{2a}$) 的叠加, 联合主应力的方向恒与 σ_{1a} , σ_{2a} 一致。

以上是取同号偏应力为准进行叠加, K 为正值的情形。若取异号偏应力为准进行叠加, 则 K 为负值, θ - α 曲线与 K 为正值时的曲线呈旋转反对称关系 (图 5), 不再讨论。

1.2.2 不同 K 值时的 α - γ 曲线

联合应力状态 C 中, 与联合主应力相对应的联合最大剪应力为 $\pm\tau_c$, 其方向由 (6) 式中的联合剪应力角决定。 γ 是 K 与 α 的函数, 其关系可由图 6 的曲线族表示。 γ 角的符号与 θ 角相反, K - α - γ 曲线族与 K - α - θ 曲线族呈镜像对称, 但两者纵坐标上的角度标注是不同的。现对 K - α - γ 曲线族简略讨论如下:

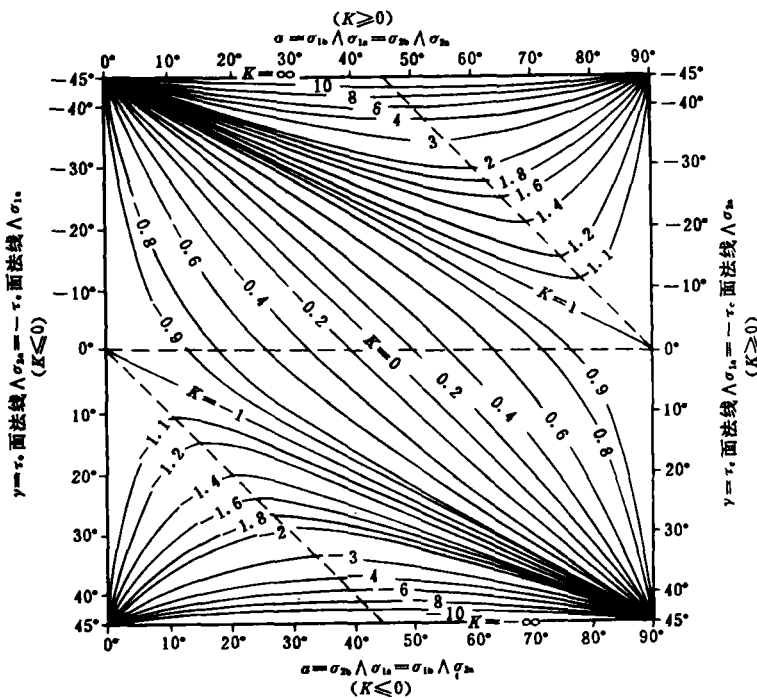


图 6 各种 K 值时的 γ - α 关系曲线

Fig. 6 γ - α curves at different K values

a. 当 $K=0$ 时, $\sigma_{1c}-\sigma_{2c}=0$, $\gamma=\alpha-45^\circ$; $\alpha=0^\circ$ 时, $\gamma=-45^\circ$; $\alpha=45^\circ$ 时, $\gamma=0^\circ$; $\alpha=90^\circ$ 时, $\gamma=45^\circ$ 。即 τ_c 剪切面法线始终与 σ_{1c} 成 45° 角, 而 σ_{1c} 与 σ_{1b} 方向一致。

b. 当 $K=1$ 时, $\gamma=\alpha/2-45^\circ$; $\alpha=0^\circ$, $\gamma=-45^\circ$; $\alpha=90^\circ$, $\gamma=0^\circ$, 函数图像为直线。

c. 当 $1 > K > 0$ 时, $-45^\circ \leq \gamma \leq +45^\circ$ 。当 $\alpha=0^\circ$ 时, $\gamma=-45^\circ$, 随 α 增大, γ 的度数减小, 符号仍为负; 当 α 增至临界角 α_0 时, $\gamma=0^\circ$; 然后随着 α 的加大, γ 变为正号并逐渐加大; 当 $\alpha=90^\circ$ 时, $\gamma=45^\circ$ 。在 (6) 式中, 令 $\gamma=0^\circ$, 可得

$$\cos 2\alpha_0 = -K \quad (10)$$

d. 当 $\infty > K > 1$ 时, γ 为负角, $|\gamma| \geq |\alpha/2 - 45^\circ|$, 随 α 加大 $|\gamma|$ 先是减小, 当 $\alpha=\alpha_0$, $|\gamma|=\gamma_m$, 达到最小值。然后, 随 α 的加大, $|\gamma|$ 又相应加大; 当 $\alpha=90^\circ$ 时, $\gamma=45^\circ$ 。各种 K 值时, α_0 和 γ_m 所确定的点都位于图 6 右上角的虚线上, 其关系为

$$\gamma_m = \alpha_0 - 90^\circ \quad (11)$$

在(6)式中,以 γ_m 代 γ , α_0 代 α ,并把(11)式代入,得

$$\cos 2\alpha_0 = -1/K \quad (12)$$

(12)式中的形式同(9)式,但 α_0 所代表的意义不同。

e. 当 $K=\infty$ 时,无论 α 为何值, γ 恒为 -45° 。

以上是 $K \geq 0$ 时的情形, $K \leq 0$ 时的曲线族与之呈旋转反对称关系(图6),不再讨论。

2 纯剪应力状态的叠加问题

如图7,两个纯剪应力状态同时作用于地壳内一点 O :纯剪应力状态A的最大剪应力为 $|\pm\tau_a|$,作用面分别为 A_1 和 A_2 ; A_1 面法线为 $\overline{OA_2}$, A_2 面法线为 $\overline{OA_1}$ 。纯剪应力状态B的最大剪应力为 $|\pm\tau_b|$,作用面分别为 B_1 和 B_2 ; B_1 面法线为 $\overline{OB_2}$, B_2 面法线为 $\overline{OB_1}$ 。若已知 τ_a , τ_b 的数值及其作用面的锐夹角 $\alpha = \angle B_1OA_1 = \angle B_2OA_2$ (应力叠加角),则可求得联合纯剪应力状态C。

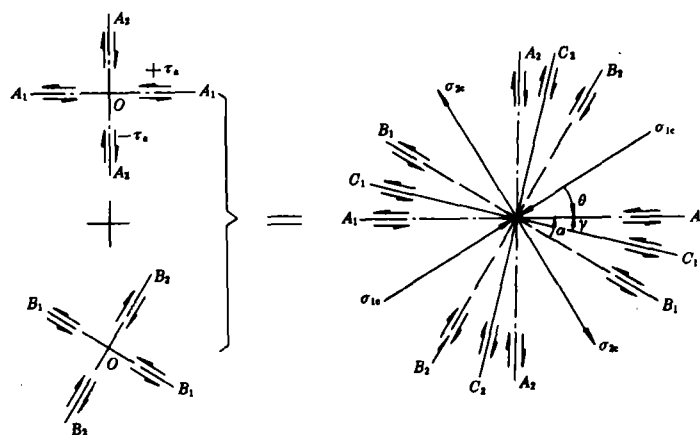


图7 两个纯剪应力状态的叠加关系

Fig. 7 Superposition of two pure shear stress-states

现取A, B两者的同号剪应力为准,进行叠加。在 $\sigma_{(a)}-\tau_{(a)}$ 直角坐标系中,以 O 为中心, $OA_2 = \tau_a$ 为半径,作纯剪应力状态A应力圆。在过同一原点的 $\sigma_{(b)}-\tau_{(b)}$ 直角坐标系中,以 $OB_2 = \tau_b$ 为半径,作纯剪应力状态B应力圆,令 $\tau_{(b)}$ 轴 \wedge $\tau_{(a)}$ 轴 $= \sigma_{(b)}$ 轴 \wedge $\sigma_{(a)}$ 轴 $= 2\alpha$ (图8)。取以 OD 或 OA_2 为法线的截面为叠加参照面,该面上的叠加应力为

$$\begin{aligned} \sigma &= -\overline{DE} = -\tau_b \sin 2\alpha \\ \tau &= \overline{OA_2} + \overline{OE} = \tau_a + \tau_b \cos 2\alpha \end{aligned}$$

作辅助矩形 $OCFH$,使 $\overline{OH} = \overline{DE}$, $\overline{OG} = \overline{OA} + \overline{OE}$,则 $\angle FOG = 2\gamma$, $\angle HOF = 2\theta$ (图8b)。在应力圆A上,以 $\tau_{(a)}$ 轴为边,顺时针量取 2γ 角,则另一角边即为 $\tau_{(c)}$ 轴,相应也就得到 $\sigma_{(c)}$ 轴。以 O 为中心, \overline{OF} 为半径即可画出联合纯剪应力状态C应力圆,并可直接得出纯剪应力状态的叠加公式如下:

$$\begin{aligned} \sigma_{1c} \\ \sigma_{2c} \end{aligned} = \pm \tau_c = \pm \sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{OG}^2} = \pm \sqrt{\tau_a^2 + \tau_b^2 + 2\tau_a\tau_b \cos 2\alpha} \quad (13)$$

$$\operatorname{tg}2\theta = -(\tau_x + \tau_y \cos 2\alpha) / \tau_y \sin 2\alpha = -(K + \cos 2\alpha) / \sin 2\alpha \quad (14)$$

$$\operatorname{tg}2\gamma = \tau_y \sin 2\alpha / (\tau_x + \tau_y \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha / (K + \cos 2\alpha) \quad (15)$$

(其中 $K = \tau_x / \tau_y$, 称为剪应力比或叠加比)

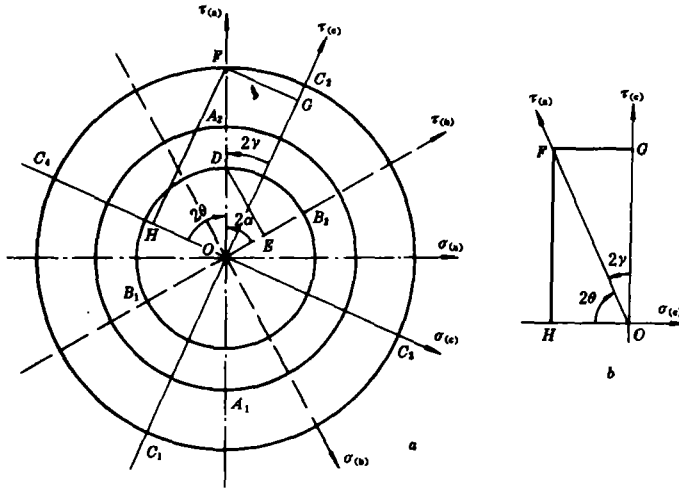


图 8 纯剪应力状态的应力圆的叠加

Fig. 8 Superposition for Mohr's circles of shear stress-states

$\theta = \sigma_{2c} \wedge OA_2$ (τ_x 面法线) $= \sigma_{1c} \wedge OA_1$ ($-\tau_x$ 面法线), 为联合主应力角. $\gamma = \angle C_1OA_1 = \angle C_2OA_2$ 为联合剪应力角 (见图 7). γ 角沿逆时针量取, 为正角, $\operatorname{tg}2\gamma$ 取正值; θ 角沿顺时针量取, 为负角, $\operatorname{tg}2\theta$ 取负值.

纯剪应力状态叠加时的 K - α - γ 曲线族与主应力状态叠加时的 K - α - θ 曲线族 (图 5) 相似, 只需改动纵坐标即可. 图 5 的纵坐标改为 γ 角后, 左侧为负角, 从 -90° 至 0° ; 右侧为正角, 从 0° 至 90° ; 横坐标不变仍为 α 角. K - α - θ 曲线族也相同, 但图 5 内 K 值的正负号需改换, 纵坐标均取为最小值 -45° , 最大值 $+45^\circ$ 即可. 限于篇幅, 对这两类剪切叠加曲线族不再讨论.

3 主应力状态与纯剪应力状态的互相叠加

3.1 叠加公式推导

实际应用中, 有时涉及主应力状态与纯剪应力状态之间的叠加问题. 一般说来, 可以先把纯剪应力状态化为主应力状态, 或把主应力状态化为纯剪应力状态, 然后再按上文提出的方法进行叠加. 若直接推导出主应力状态与纯剪应力状态相互叠加公式, 用起来会更方便些.

设有主应力 σ_{1a} , σ_{2a} 和纯剪应力 $\pm \tau_a$ 同时作用于地壳内一点 O , 应力叠加角 $\alpha = N_b \wedge \sigma_{1a} = N'_b \wedge \sigma_{2a}$, N_b , N'_b 分别为 τ_a , $-\tau_a$ 面法线. 联合主应力为 σ_{1c} , σ_{2c} , 联合主应力角 $\theta = \sigma_{1c} \wedge \sigma_{1a} = \sigma_{2c} \wedge \sigma_{2a}$; 联合最大剪应力为 $\pm \tau_c$, 联合剪应力角 $\gamma = N_c \wedge \sigma_{1a} = N'_c \wedge \sigma_{2a}$. N_c , N'_c 分别为 τ_c 和 $-\tau_c$ 面法线 (图 9).

主应力 σ_{1a} , σ_{2a} 可分解为平均应力 $\sigma_{ma} = (\sigma_{1a} + \sigma_{2a}) / 2$ 和偏应力 $d_a = \pm (\sigma_{1a} - \sigma_{2a}) / 2$, 然后与纯剪应力状态 $\pm \tau_c$ 进行叠加.

如图 10, 在 $\sigma_{(a)}$ - $\tau_{(a)}$ 直角坐标系中, 以 $\overline{OA} = d_a$ 为半径画出偏应力状态应力圆. 另作 $\sigma_{(c)}$, $\tau_{(c)}$

坐标系, 使 $\tau_{(b)}$ 轴 $\wedge \sigma_{(a)}$ 轴 $= 2\alpha$, 以 $\overline{OB} = \tau_b$ 为半径, 同一原点 O 为中心, 画出纯剪应力状态应力圆。取以 \overline{OD} 或 \overline{OA} 为法线的截面为叠加参照面, 该面上由两个应力状态产生的全部正 (偏) 应力与剪应力为:

$$d = \overline{OA} - \overline{DE} = d_a - \tau_b \sin 2\alpha$$

$$\tau = \overline{OE} = \tau_b \cos 2\alpha$$

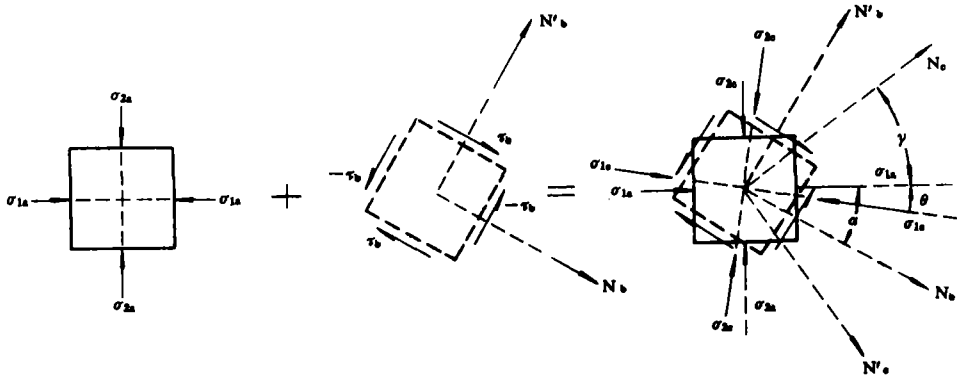


图 9 主应力状态与纯剪应力状态的叠加关系

Fig. 9 Superposition of principle stress-state with shear stress-state

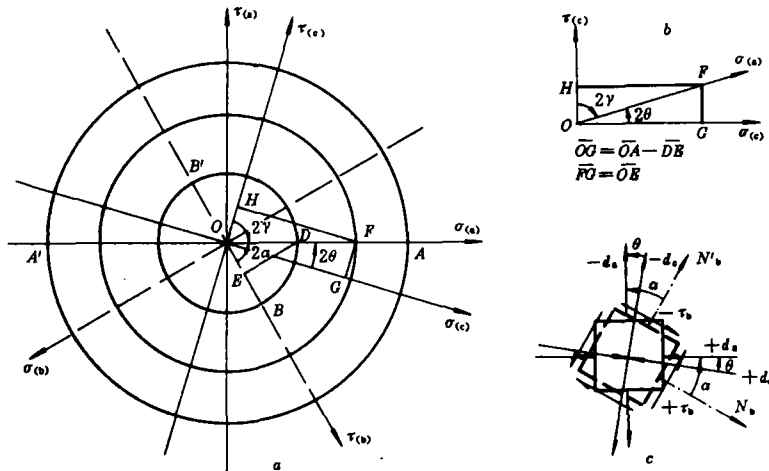


图 10 偏应力状态应力圆与纯剪应力圆的叠加

Fig. 10 Superposition for Mohr's circles of deviatoric stress and shear stress

作辅助矩形 $OCFH$, 使 $\overline{OG} = \overline{OA} - \overline{DE} = d$, $\overline{OH} = \overline{OE} = \tau$. 延长 \overline{OG} 和 \overline{OH} 即相当于 $\sigma_{(c)}$ 轴和 $\tau_{(c)}$ 轴, 延长对角线 \overline{OF} 相当于 $\sigma_{(a)}$ 轴。把矩形移置到图 10a 的实际位置上, 以 \overline{OF} 为半径即可画出 d_a 与 τ_b 叠加所得的联合应力状态应力圆, 并可得出以下叠加公式:

$$\begin{aligned} \pm \tau_c &= \pm d_c = \pm \sqrt{d^2 + \tau^2} \\ &= \pm \left[\sqrt{(\sigma_{1a} - \sigma_{2a})^2 + 4\tau_b^2 - 4(\sigma_{1a} - \sigma_{2a})\tau_b \sin 2\alpha} \right] / 2 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\sigma_{1c}}{\sigma_{2c}} = \frac{\sigma_{1a} + \sigma_{2a}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{1a} - \sigma_{2a})^2 + 4\tau_b^2 - 4(\sigma_{1a} - \sigma_{2a})\tau_b \sin 2\alpha} \quad (17)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \tau_b \cos 2\alpha / (d_a - \tau_b \sin 2\alpha) = \cos 2\alpha / (K - \sin 2\alpha) \quad (18)$$

$$\operatorname{tg} 2\gamma = - (d_a - \tau_b \sin 2\alpha) / \tau_b \cos 2\alpha = - (K - \sin 2\alpha) / \cos 2\alpha \quad (19)$$

$$[K = d_a / \tau_b = (\sigma_{1a} - \sigma_{2a}) / 2\tau_b]$$

θ 角沿逆时针量取为正角, γ 沿顺时针量取为负角, $\operatorname{tg} 2\gamma$ 亦取负值。

3.2 叠加曲线及其讨论

3.2.1 K - α - θ 曲线族

由式 (18) 可以计算出各种 K 值时的 θ 和 α 的相关数值, 并绘制出各种 K 值时的 θ - α 曲线族 (图 11), 其图像与主应力状态及纯剪应力状态分别叠加时的叠加曲线不同, 现概略讨论如下:

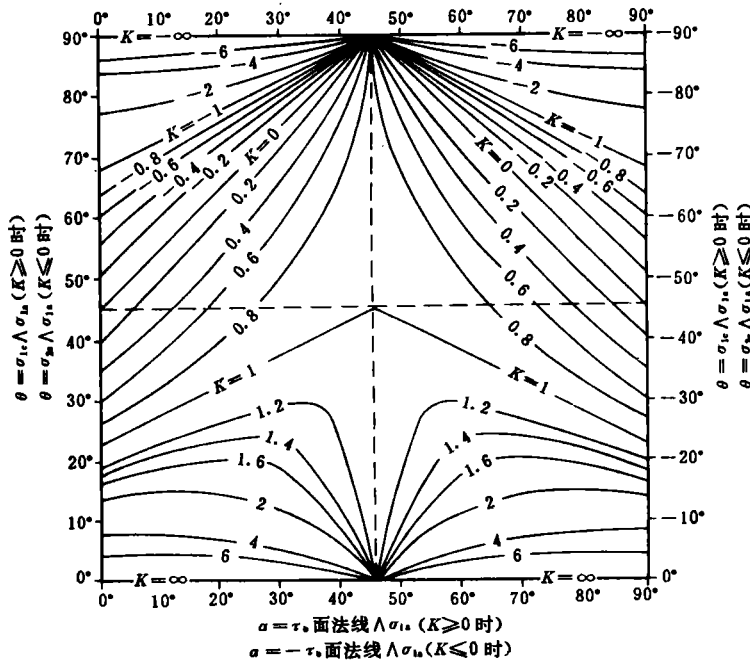


图 11 各种 K 值时的 θ - α 曲线

Fig. 11 θ - α curves at different K values

a. 当 $K=0$ 时, $d_a=0$, $\sigma_{1a}=\sigma_{2a}$, 表示纯剪应力状态与等应力状态叠加。当 α 从 $0^\circ \rightarrow 45^\circ \rightarrow 90^\circ$ 时, θ 角的变化相应从 $45^\circ \rightarrow \pm 90^\circ \rightarrow -45^\circ$ 。

b. 当 $K=1$ 时, $d_a=\tau_b$ 或 $\sigma_{1a}-\sigma_{2a}=2\tau_b$ 。当 $\alpha=0^\circ$ 时, $\theta=22^\circ 30'$ 。当 $\alpha=45^\circ$ 时, 由 (17) 式,

可得 $\sigma_{1c} = \sigma_{2c} = \sigma_{mc} = \sigma_{ma} = (\sigma_{1a} + \sigma_{2a}) / 2$, 即在联合应力状态中偏应力分量 $d_c = 0$, 仅余等应力分量, 此时 θ 可以为任意值, 无意义。但在图 11 中 $K=1$, $\alpha=45^\circ$ 时, $\theta = \pm 45^\circ$, 可以看作是正角和负角转变的极限。过正负转换点后, θ 角变为负值, 随 α 角的加大, θ 角 (绝对值) 递减; 当 $\alpha=90^\circ$ 时, $\theta = -22^\circ 30'$ 。 θ 与 α 关系呈线性变化。

c. 当 $1 > K > 0$ 时, $\tau_0 > d_a > 0$, θ - α 函数关系由两族曲线表示。当 α 从 0° 到 45° 时, θ 角为正, 并从某一初始值递加到 90° 。 $\alpha=45^\circ$ 时, $\theta = \pm 90^\circ$ 。 α 从 45° 到 90° , θ 为负, 其绝对值随 α 的增加而递减。

d. 当 $\infty > K > 1$ 时, $d_a > \tau_0 > 0$, θ - α 关系亦由两族曲线表示。当 α 从 0° 递增到临界值 α_0 时, θ 从初始值递增到最大值 θ_m 。 α 继续加大, θ 开始减小; 当 $\theta=45^\circ$ 时, $\theta=0^\circ$ 。 α_0 和 θ_m 由 K 值决定, 且有 $\theta_m = \alpha_0$, 以此代入 (18) 式, 可得:

$$\sin 2\alpha_0 = 1/K \quad (20)$$

在取值时, 应使 $90^\circ > 2\alpha > 0^\circ$ 。当 α 超过 45° , θ 变成负角。 α 从 45° 递增到另一临界值 α'_0 时, θ 的绝对值达到最大值 θ'_m ; α 继续加大, θ 的绝对值又趋减小; $\alpha=90^\circ$, θ (绝对值) 达到最小。 $\theta'_m = \alpha'_0 - 90^\circ$, 以此代入 (18) 式, 得 $\sin 2\alpha'_0 = 1/K$, 与 (20) 式同, 但在取值时, 应使 $180^\circ > 2\alpha'_0 > 90^\circ$ 。

e. 当 $K = \infty$ 时, 即 $\tau_0 = 0$, θ 角恒等于 0° 。

以上是取同号应力 d_a , τ_0 (或 $-d_a$, $-\tau_0$) 为准进行叠加, K 为正值时的情形。若取异号应力为准进行叠加, 则 K 为负值。 K 为负值时, θ - α 曲线及其数值变化与 $1 > K > 0$ 时的情形相似, 即 α 在 0° 至 45° 区间, θ 为正角, 并随 α 的加大而逐渐加大到 90° 。 $\alpha=45^\circ$ 时, $\theta = \pm 90^\circ$ 。在 α 为 45° — 90° 时, θ 为负角, 其绝对值随 α 的加大而减小。 $K = -\infty$ 时, $\theta = \pm 90^\circ$ 。

3.2.2 K - α - γ 曲线族

由 (19) 式可绘出各种 K 值时的 γ - α 曲线 (图 12)。曲线形态与 θ - α 曲线 (图 11) 完全相同, 但所代表的角度不同, 两图各曲线在每一对应点上都相差 45° 。若以 $\gamma=0^\circ$ 的横线和 $\alpha=45^\circ$ 的竖线把图 12 划分为四个象限, 则 I, III 象限 γ 为负角, 代表联合最大剪应力 τ_c 作用面法线与 σ_{1a} 的夹角; II, IV 象限 γ 为正角, 代表 $-\tau_c$ 作用面法线与 σ_{1a} 的夹角。

以上分析了二维主应力状态和纯剪应力状态叠加的各种情形。一般应力状态的叠加也可以按同样的方法处理, 但计算公式比较复杂, 在实际应用中, 可以先把一般应力状态变换为主应力状态或纯剪应力状态, 然后再按以上各节的方法进行叠加。正如上文所指出, 应力状态的叠加是构造应力场叠加的基础, 在这个基础上可以建立起联合构造应力场的系统理论和分析方法——这是继本文之后将陆续刊出的几篇系列论文所要研究的课题。

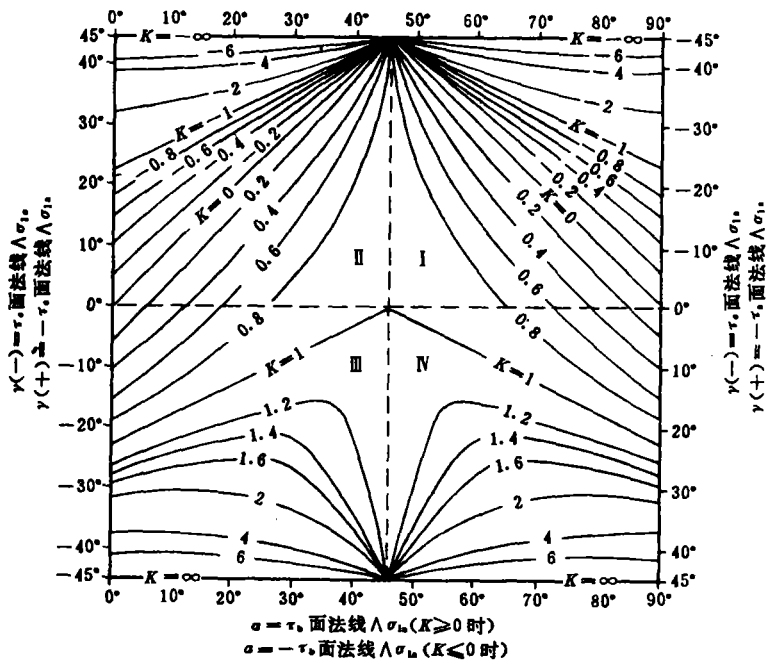


图 12 各种 K 值时的 γ - α 曲线
 Fig. 12 γ - α curves at different K values

参 考 文 献

- 1 李四光, 地质力学概论, 北京, 科学出版社, 1973
- 2 乐光禹、杜思清, 联合构造理论的若干问题, 地质力学文集 (第九集), 北京, 地质出版社, 1989
- 3 黄炎, 工程弹性力学, 北京, 清华大学出版社, 1982
- 4 Г. С. 皮萨连科, А. И. 亚科夫列夫等, 材料力学手册 (中译本), 北京, 中国建工出版社, 1981
- 5 Means, W. D., Stress and Strain, New-York, Inc., 1976
- 6 Brace, W. F., Mohr construction in the analysis of large geologic strain, Geol. Soc. Am. Bull., 1961. vol. 72
- 7 李民庆, 岩体力学的物理基础, 长沙, 湖南科技出版社, 1979
- 8 杜思清, 平面等应力与平面偏应力及其在构造体系分析中的意义, 四川地质学报, 1981, 2 (2)
- 9 乐光禹, 共轭雁行节理系的应力分析, 地质论评, 1985, 31 (3)
- 10 乐光禹、杜思清, 应力叠加和联合构造, 中国科学 (B 辑), 1986, 第 8 期

THE PROBLEM OF SUPERPOSITION FOR STRESS-STATES

—Research on combined tectonic stress field (I)

Yue Guangyu

Abstract According to the principle of superposition of elastic theory, the complex tectonic stress-field can be considered to be superposition of some simple tectonic stress-fields. The superposition of stress-states provides the basis for analysing the superposition of tectonic stress-fields. Some formulas of superposition for different stress-states are calculated and the regularity of the change of relevant parameters in different cases are also discussed in this paper.

Key words principle of superposition, stress states, tectonic stress field, tectonic pattern

表生成矿环境下金和有机物的相互作用

第 28 届国际地质学会议上, M. Benedetti 提出了表生成矿环境下金和有机物的相互作用, 认为有机物质可能是使金发生富集的一个因素。主要有两点研究成果: a. 金化合物实验室的研究; b. 野外金-有机物共生关系。

M. Benedetti 利用配位体与离子交换树脂竞争法及随之的液体馏分分析法, 研究金与有机、无机配位体的可能的络合方式。这种方法能够在配位体浓度较低的情况下获得络合物形成的有关数据。与 Au^{3+} 络合物有关的有效配位体的浓度受离子效应影响, 但在富集 Au^{3+} 络合物的环境中, 动力学效应成为限定 Au^{3+} 与配位体间相互作用的主要因素。

在上述的认识下, M. Benedetti 讨论了络合物在使金附着于有机物中的作用。在建立表生环境下, 含硫化物富金的矿脉淋滤模式时, 利用了获得的有关 Au^+ , Au^{3+} 的数据。这一模式可与有关金淋滤和迁移的野外数据比较。

M. Benedetti 在研究了法国 Cevennes 区变质基底内辉锑矿化脉中(含金 0.1ppm)金的淋滤作用。在矿化脉区淋出的地下水中, 溶解的金的富集程度高(10^{-10}m/l), 这是由于形成了 $\text{Au}(\text{S}_2\text{O}_3)_2^{3-}$ 及该络合物的分解所致。同一区域, 在上覆于变质底部的砾岩层内的煤层中($\text{Au}=0.01\text{ppm}$), 化学分析与光谱分析结果表明, 金的确与有机物有关, 而与硫化物无关, 金也不是以片金形式出现。

(东摘自《28th IGC Abstracts》)