

复矩阵的 Givens 变换及其 QR 分解

杜 鹃 冯思臣

(成都理工大学 管理科学学院, 成都 610059)

[摘要] 实矩阵有成熟的三角分解算法, 复矩阵尚无好的三角分解算法。为解决复矩阵的三角分解与 QR 分解问题, 采用科学类比, 重新拓展定义, 演绎计算的方法, 给出复 Givens 矩阵的定义, 推导出了复 Givens 矩阵是酉矩阵, 得到了用有限个复 Givens 变换将一个 n 维复向量旋转到任何一个给定方向的方法, 证明了任何一个非奇异复矩阵能够通过有限次复 Givens 变换, 分解为一个酉矩阵与一个复非奇异上三角矩阵的乘积, 利用复 Givens 变换解决了复矩阵的 QR 分解问题。

[关键词] 复 Givens 变换; Givens 矩阵; QR 分解

[分类号] O151.21

[文献标志码] A

1 预备知识

随着现代化科学技术的迅速发展, 矩阵的分解在控制理论、信息论、系统识别和信息处理、优化理论、最小二乘问题中都是十分重要的工具。参考文献[1~4]涉及到矩阵的 QR 分解, 并且目前的大多数文献中也只对实矩阵利用 Givens 矩阵变换、Householder 矩阵变换、Doolittle 分解得到 QR 分解公式。文献[5~8]中给出了一些更好的算法途径, 而对复矩阵的 Givens 矩阵变换及其 QR 分解, 尚没有具体方法。但这一问题在工程技术应用中是非常有实用价值的。本文就从复 Givens 矩阵变换入手, 给出复矩阵的 QR 分解方法。

定义 1 设实数 c 与 s 满足 $c^2 + s^2 = 1$, 称矩阵

$$U_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & ce^{j\theta_1} & & se^{j\theta_2} \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \\ & & -se^{j\theta_3} & & ce^{j\theta_4} & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{matrix} (i) \\ (k) \end{matrix}$$

[i] [k]

为复数形式的 Givens 矩阵(初等旋转矩阵), 其中 $c = \cos\theta > 0$, $s = \sin\theta > 0$, θ 为旋转角, $\theta_1 + \theta_4 = \theta_2 + \theta_3$ 。可以得到 $|U_{ik}| = e^{j(\theta_1 + \theta_4)}$ 当 $\theta_4 = -\theta_1 + 2n\pi$ 时 $\det U_{ik} = 1$ 。

定义 2 如果实(复)非奇异矩阵 A 能够化成正交(酉)矩阵 Q 与实(复)非奇异上三角矩阵 R 的乘积, 即 $A = QR$, 则称为 A 的 QR 分解。

[收稿日期] 2010-05-28

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目(10471112); 四川省教育厅自然科学重点资助项目(08ZA114)

[作者简介] 杜鹃(1961—), 女, 副教授, 主要研究方向: 数值代数, E-mail: dj4078@126.com。

性质 1 $U_{ik}^H U_{ik} = I$, 即 U_{ik} 是酉矩阵, 且 U_{ik}^H 也是复 Givens 矩阵。

性质 2 当 $\theta_4 = -\theta_1, \theta_3 = -\theta_2$ 时, 则

$$U_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & ce^{j\theta_1} & & se^{j\theta_2} \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & -se^{-j\theta_2} & & ce^{-j\theta_1} \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

以下讨论都假设 $\theta_4 = -\theta_1, \theta_3 = -\theta_2$ 。

性质 3 对于不全为零的复数 α 和 β , 可选取

$$c = \frac{|\alpha|}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}}, s = \frac{|\beta|}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}},$$

$$\theta_1 = -\arg \alpha, \theta_2 = -\arg \beta, \text{ 则 } \alpha ce^{j\theta_1} + \beta se^{j\theta_2} > 0, -\alpha se^{-j\theta_2} + \beta ce^{-j\theta_1} = 0。$$

证

$$\begin{aligned} & \alpha ce^{j\theta_1} + \beta se^{j\theta_2} \\ &= \alpha \frac{|\alpha|}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} e^{j\theta_1} + \beta \frac{|\beta|}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} e^{j\theta_2} \\ &= \frac{\alpha \bar{\alpha}}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} + \frac{\beta \bar{\beta}}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} \\ &= \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} = \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2} > 0, \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} & -\alpha se^{-j\theta_2} + \beta ce^{-j\theta_1} \\ &= -\alpha \frac{|\beta|}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} e^{-j\theta_2} + \beta \frac{|\alpha|}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} e^{-j\theta_1} \\ &= -\frac{\alpha \beta}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} + \frac{\beta \alpha}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} = 0。 \end{aligned}$$

性质 4 设 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{C}^n$, 当 $|\xi_i|^2 + |\xi_k|^2 \neq 0$ 时,

$$\text{令 } c = \frac{|\xi_i|}{\sqrt{|\xi_i|^2 + |\xi_k|^2}}, s = \frac{|\xi_k|}{\sqrt{|\xi_i|^2 + |\xi_k|^2}},$$

$$\theta_1 = -\arg \xi_i, \theta_2 = -\arg \xi_k, y = U_{ik} x = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T,$$

$$\text{其中 } \begin{cases} \eta_i = \xi_i c e^{j\theta_1} + \xi_k s e^{j\theta_2} \\ \eta_k = -\xi_i s e^{-j\theta_2} + \xi_k c e^{-j\theta_1} \\ \eta_t = \xi_t (t \neq i, k) \end{cases}$$

则有 $\eta_i = \sqrt{|\xi_i|^2 + |\xi_k|^2} > 0, \eta_k = 0$ 。

证 可由性质 3 推得。

2 主要结论

定理 1 设 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \neq 0, x \in \mathbb{C}^n$, 则存在有限个复数形式的 Givens 矩阵的乘积, 记为 U , 使 $Ux = \|x\|_2 e_1$ 。

证 若 $\xi_1 \neq 0$, 构造复 Givens 矩阵 U_{12} ,

$$\text{令 } c = \frac{|\xi_1|}{\sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2}}, s = \frac{|\xi_2|}{\sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2}},$$

$\theta_1 = -\arg \xi_1, \theta_2 = -\arg \xi_2$, 由性质 4 可得 $U_{12} x = (\sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2}, 0, \xi_3, \dots, \xi_n)^T$, 再对 $U_{12} x$ 构造复 Givens 矩阵 U_{13} ,

$$\text{又令 } c = \frac{\sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2}}{\sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2}},$$

$$s = \frac{|\xi_3|}{\sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2}},$$

$$\theta_1 = -\arg \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2}, \theta_2 = -\arg \xi_3,$$

$U_{13}(U_{12} x) = (\sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2}, 0, 0, \xi_4, \dots, \xi_n)^T$, 如此继续下去, 最后一次对 $U_{1n-1} \dots U_{12} x$ 构造 U_{1n} ,

$$c = \frac{\sqrt{|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_{n-1}|^2}}{\sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_{n-1}|^2 + |\xi_n|^2}},$$

$$s = \frac{|\xi_n|}{\sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_{n-1}|^2 + |\xi_n|^2}},$$

$$\theta_1 = -\arg \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_{n-1}|^2},$$

$$\theta_2 = -\arg \xi_n, U_{1n}(U_{1,n-1} \dots U_{12} x) =$$

$(\sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_{n-1}|^2 + |\xi_n|^2}, 0, 0, \dots, 0)^T$, 令 $U = U_{1n} U_{1,n-1} \dots U_{12}$, 则 $Ux = \|x\|_2 e_1$, 如果 $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \dots, \xi_{k-1} = 0, \xi_k = 0 (1 < k \leq n)$, 此时 $\|x\|_2 = \sqrt{|\xi_k|^2 + \dots + |\xi_n|^2}$, 上面的步骤由 U_{1k} 开始进行即可。

定理 2 设非零列向量 $x \in \mathbb{C}^n$, 及单位列向量 $z \in \mathbb{C}^n$, 则存在有限个复 Givens 矩阵的乘积, 记为 U , 使得 $Ux = \|x\|_2 z$ 。

证 由定理 1, 对于向量 x , 存在 $U^{(1)} = U_{1n}^{(1)} U_{13}^{(1)} U_{12}^{(1)}$, 其中 $U_{ik}^{(1)} (i = 1; k = 2, 3, \dots, n)$ 是复 Givens 矩阵, 使得 $U^{(1)} x = \|x\|_2 e_1$; 又对于向量 z , 存在 $U^{(2)} = U_{1n}^{(2)} \dots U_{13}^{(2)} U_{12}^{(2)}$, 其中 $U_{ik}^{(2)}$ 是复 Givens 矩阵, 使得 $U^{(2)} z = \|z\|_2 e_1 = e_1$, 于是有 $U^{(1)} x = \|x\|_2 e_1 = \|x\|_2 U^{(2)} z$, 所以 $[U^{(2)}]^{-1} U^{(1)} x =$

$\|x\|_2 \neq 0$.

令 $U = [U^{(2)}]^{-1} U^{(1)} = [U_{1n}^{(2)} \cdots U_{13}^{(2)} U_{12}^{(2)}]^{-1} U_{1n}^{(1)} \cdots U_{13}^{(1)} U_{12}^{(1)} = U_{12}^{(2)H} U_{13}^{(2)H} \cdots U_{1n}^{(2)H} U_{1n}^{(1)} \cdots U_{13}^{(1)} U_{12}^{(1)}$, 由性质 1 可得 $U_{12}^{(2)H}, U_{13}^{(2)H}, \cdots, U_{1n}^{(2)H}$ 都是复 Givens 矩阵, 因此 U 是有限个 Givens 矩阵的乘积。

定理 3 任何 n 阶复非奇异矩阵 $A = (a_{ij})$ 可通过左连乘有限个复初等旋转矩阵化为上三角矩阵, 且对角线元素除最后一个外都是正数。

证 先由 $\det A \neq 0$, 知 A 的第 1 列 $b^{(1)} = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1})^T \neq 0$, 由定理 1, 存在有限个复 Givens 矩阵的乘积, 记为 $U_1 = U_{1n} U_{1,n-1} \cdots U_{12}$, 使得 $U_1 b^{(1)} = \|b^{(1)}\|_2 e_1 (e_1 \in \mathbb{R}^n)$

令 $a_{11}^{(1)} = \|b^{(1)}\|_2$, 则有

$$U_1 A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \vdots & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & A^{(1)} & \\ 0 & \vdots & & & \end{bmatrix}$$

因为 $\det A \neq 0, a_{11}^{(1)} \neq 0$, 知 $\det A^{(1)} \neq 0$, 可得 $A^{(1)}$ 的第 1 列 $b^{(2)} = (a_{22}^{(1)}, a_{32}^{(1)}, \cdots, a_{n2}^{(1)})^T \neq 0$; 又由定理 1, 存在有限个复 Givens 矩阵的乘积, 记作 $U_2 = U_{2n} U_{2,n-1} \cdots U_{23}$, 使 $U_2 b^{(2)} = \|b^{(2)}\|_2 e_1, (e_1 \in \mathbb{R}^{n-1})$, 令 $a_{22}^{(2)} = \|b^{(2)}\|_2$, 得

$$U_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{22}^{(2)} & \vdots & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & A^{(2)} & \\ 0 & \vdots & & & \end{bmatrix}$$

继续做下去, 到第 $n-1$ 步, 由 $\det A^{(n-2)} \neq 0$, 知 $A^{(n-2)}$ 的第 1 列 $b^{(n-1)} = (a_{n-1,n-1}^{(n-2)}, a_{nn}^{(n-2)})^T \neq 0$, 由定理 1 存在复 Givens 矩阵 U_{n-1} , 使得 $U_{n-1} b^{(n-1)} = \|b^{(n-1)}\|_2 e_1, (e_1 \in \mathbb{R}^2)$, 令 $a_{n-1,n-1}^{(n-1)} = \|b^{(n-1)}\|_2$, 则有 $U_{n-1} A^{(n-2)} = \begin{bmatrix} a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$,

再令 $U = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} U_1$.

下面证 $\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix}$ 都是复 Givens 矩阵之积, 这里可只就

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix}$ 证即可。

因为 $U_2 = U_{2n} U_{2,n-1} \cdots U_{23}$, 其中 $U_{2n}, U_{2,n-1},$

$\cdots, U_{23}$ 都是复 Givens 矩阵, 则 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_{2n} \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_{2,n-1} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_{23} \end{bmatrix}$ 也是复 Givens 矩阵;

又 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_{2,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix}$, 所

以 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix}$ 是复 Givens 矩阵之积, 因此, U 是有

有限个复 Givens 矩阵的乘积, 使

$$UA = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ & & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

记 $UA = R$, R 是上三角矩阵, 即 A 可以通过左连乘的复 Givens 矩阵化为上三角矩阵, 且 R 的主对角线上元素, 除最后一个外都是正数。再 $A = U^{-1}R$, 令 $Q = U^{-1}$, 即 $A = QR$, 其中 U^{-1} 是有限个复 Givens 的乘积, U^{-1} 是酉矩阵, R 是非奇异的上三角矩阵, 则得到任何 n 阶非奇异矩阵 A 都可用复 Givens 矩阵变换作 QR 分解。

【参 考 文 献】

- [1] Parlett B N. The QR algorithm[J]. Computing in Science & Engineering, 2000, 2(1/2): 38-42.
- [2] 杜鹃, 范啸涛, 杨健康. 自伴矩阵与 Hermite 二次型[J]. 成都理工大学学报: 自然科学版, 2007, 34(4): 478-481.
- [3] Liz. QR factorization based blind channel identification and equalization with second-order statistics[J]. IEEE Trans Signal processing, 2000, 48(4): 60-69.
- [4] 袁晖坪. 行(列)反对称矩阵的 QR 分解[J]. 安徽大学学报: 自然科学版, 2008, 32(2): 21-24.
- [5] 杜鹃, 范啸涛, 冯思臣. 特殊矩阵的 kronecker 积[J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2009, 34(1): 56-59.
- [6] 刘秀梅. 矩阵 QR 分解途径的研究[J]. 内江师范学院学报, 2007, 22(4): 18-20.
- [7] 简小林, 蒋耀林. 酉对称矩阵的 QR 分解及其算法[J]. 计算机学报, 2005, 28(5): 817-822.
- [8] 郭华. 次正规矩阵, 次酉矩阵, 次厄来特矩阵及反次厄来特矩阵[J]. 大学数学, 2007, 23(2): 174-177.

